



TITLE:

# アーベル群の $\mathbb{Z}$ -双対について(数学基礎論)

AUTHOR(S):

江田, 勝哉

---

CITATION:

江田, 勝哉. アーベル群の $\mathbb{Z}$ -双対について(数学基礎論). 数理解析研究所講究録 1986, 588: 9-19

ISSUE DATE:

1986-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99425>

RIGHT:

# アーベル群の $\mathbb{Z}$ -双対について

江田 勝哉 (筑波大学)

アーベル群  $A$  の  $\mathbb{Z}$ -双対  $A^*$  とは  $A$  から整数群  $\mathbb{Z}$  への準同型写像のなす群  $\text{Hom}(A, \mathbb{Z})$  のことです。  $A^*$  は直積  $\mathbb{Z}^A$  の部分群ですが必ずしも自由アーベル群や直積  $\mathbb{Z}^I$  と同型となるとは限りません。  $\text{Hom}(A, \mathbb{Z})$  は  $\text{Ext}(A, \mathbb{Z})$  と共に Homological Algebra でよく現われますがコンパクト・アーベル群の研究と関連して次の exact 列にでてきます。詳しくは、Reid の講義録 [R] を見て下さい。

$G$  をコンパクト・アーベル群、  $\hat{G}$  をポトリアギン双対とすると

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\hat{G}, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{L}_G \xrightarrow{\text{exp}} G \rightarrow \text{Ext}(\hat{G}, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

但し、  $\mathcal{L}_G = \text{Hom}^T(\mathbb{R}, G)$ ,  $\text{exp}(\theta) = \theta(1)$ 。

ちなみに、 Shelah が独立であることを証明した。  
 “  $\text{Ext}(A, \mathbb{Z}) = 0 \rightarrow A$  が free ” という命題は “ 弧連結コンパクト・アーベル群は circle 群の直積 ” という命題と同値です。ところで  $\mathbb{Z}$ -双対になりうるアーベル群はどれ程知られていません。それは非可算の torsionfree アーベル群については  $p$ -群におけるような構造定理がうまくいっていないからかもしれません。非可算の torsionfree

アーベル群は 1974・75 年の Shelah の結果以来  $\diamondsuit$ , MA  
その他の集合論の手法を使った研究がありますが、これらは  
アーベル群  $A$  の部分群の列  $H_\alpha \subseteq H_{\alpha+1}$  を使って研究するも  
のですが  $A^*$  を考えるとそれは  $H_\alpha^*$  の inverse limit というこ  
とになります。けれども、inverse limit というのはどこの世界  
でも扱いにくいもので (inverse limit の要素というのは、場合  
によっては選択公理を使わないと捕まえられなかったりする  
わけですから当然とも言えます) inverse limit の  $\mathbb{Z}$ -双対を  
計算することは一般にはできません。こういった事情もあっ  
て  $A^*$  及び  $A^{**}$  はよくわかっていないのだと思います。

ここでは、 $\mathbb{Z}$ -双対についての最近までの結果を紹介しま  
す。又、集会の発表の際、可能性として述べた Nonarch-  
median functional analysis における Chase の lemma 及びそ  
の応用ができましたので、それについても述べます。

1967 年の講義録で Reid は Reid class  $R$  を定義  
しました。(勿論、Reid class という名前は後で他の人がつけた  
のであが)  $R$  は  $\mathbb{Z}$  を含み直和と直積で閉じた最小の  
class です。Reid class に属する群  $A$  が 非可測濃度 (つ  
まり 最小の可測基数  $M_c$  未満) であると  $A^*$  を  $R$  に属し、  
 $A^{**}$  が自然な写像で  $A$  と同型となります。自然な写像  
 $A \rightarrow A^{**}$  が同型るとき  $A$  を反射的といいます。非可測

濃度の仮定は J. Łoś の定理と関係しています。

定理 (Łoś)  $\bar{I} < M_c$  (最小可測基数) のとき

$$\text{Hom}(\prod_{i \in I} A_i, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{i \in I} \text{Hom}(A_i, \mathbb{Z}) \text{ である。}$$

この定理の濃度条件は前にお話したように (数解研講究録 480,  $[E_1, E_2]$ ) のように落とすことができて、

$$\text{Hom}(\prod_{i \in I} A_i, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{F \in \mathcal{F}} \text{Hom}(\prod A_i / F, \mathbb{Z}), \text{ 但し } \mathcal{F} \text{ は}$$

$I$  上の可算完備 ultrafilter 全体で  $\prod A_i / F$  は ultraproduct

です。このため  $A \in \mathcal{R}$  で  $\bar{A} > M_c$  であると  $A$  は反射的

でなくなります。筆者は " $A \in \mathcal{R} \rightarrow A^* \in \mathcal{R}$ " が一般には成

立しないのではないかと思っているのですが、今のところよく

わかりません。([E<sub>4</sub>] 参照) 以下の話は、非可測濃度

に制限し、最後に可測基数にふれます。Reid の講義

録のあと 10 年あまり Reid class の群  $\bigoplus_N \prod_N \cdots \mathbb{Z}$  とい

ったものがすべて非同型かどうかわかりませんでした。"これ

らがすべて非同型であることを示せ" というのが Reid の問題の

一つです。1979 年に B. Zimmerman-Huisgen [Z], 独立に

1980 年に A.V. Ivanov が次を証明しました。

定理 1. (B. Zimmerman-Huisgen, A.V. Ivanov)

$\bigoplus_N \prod_N \cdots \mathbb{Z}$  の型がちがうものは非同型である。

又、その後 Dugas と共に Zimmerman はこれを超限回くりかえしても必ず非同型な群が現われることを示しました。

定理 2 (M. Dugas and B. Zimmerman-Huisgen [D-Z])  
 $\oplus \kappa_1 \cdots \prod \kappa_\alpha \cdots \mathbb{Z}$  は非同型。但し  $\prod$  の添字は非可測基数。

色々あることが

このように  $\mathcal{R}$  の群がわかりました。Reid は次の問題も出していました。“非可測濃度のアーベル群  $A$  について、 $A^*$  は反射的か” 又もっと強く “ $A^*$  は  $\mathcal{R}$  に属するか。” 第 2 の問題は、非可測濃度の  $\mathcal{R}$  の群に type を定義することにより、筆者が次のことを示しました。

定理 3 [E<sub>3</sub>]  $C(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$  を有理数全体の空間  $\mathbb{Q}$  から離散群  $\mathbb{Z}$  への連続関数のなす群とする。このとき  $C(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})^*$  は  $\mathcal{R}$  に属さない。

筆者はこの後に Reid の第一の問題を知りました。 $C(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})^*$  は  $\mathcal{R}$  に属さないのですから  $C(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})^*$  が反射的にならない可能性があったのです。その前から  $C(X, \mathbb{Z})$  には興味をもっていたのですが、 $C(X, \mathbb{Z})^*$ ,  $C(X, \mathbb{Z})^{**}$  を計算しようと思いました。初めは全くわからなかったのですが気がついてみれば簡単で次のことがわかるのです。0-次元ハウスドルフ空間  $X$  について  $\beta_N X$  を  $X$  の  $N$ -コンパクト化、 $k_N X$  を  $X$  の  $k_N$  化、つまり  $X$  の任意のコンパクト部分空間への制限が clopen であるものが  $k_N X$  の clopen 集合。

定理 4 [E-O].  $X = \beta_N X$  とする。  $C(X, \mathbb{Z})$  が反射

的であること、 $k_N X = X$  で  $X$  の任意のコンパクト部分集合の濃度が非可測であることが同値である。さらに  $X$  の任意のコンパクト部分集合の濃度が非可測であるとき  $C(X, \mathbb{Z})^*$  が反射的であることと  $k_N X = \beta_N(k_N X)$  であることが同値である。

これから  $C(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$  が反射的であるとわかりますので、勿論  $C(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})^*$  は反射的です。けれども非可測濃度の空間で  $k_N X$  が  $N$ -コンパクトにならないものをつくれはよいのです。空間  $\omega_2$  は  $k$ -空間でないことがよく知られているのでこれに目をつけたのですが、 $k_N(\omega_2) = \omega_2$  かどうかわかりませんでした。(ずっと後で、大田春外さんが Noble の結果を使って、これが成立することを示したので、これも反例にはなりません。) そこで、位相空間論の人たちに  $N$ -コンパクト空間  $X$  が非可測濃度であれば  $k_N X$  は  $N$ -コンパクトか、" という問題を出しました。結局、大田さんが次の反例を示しました。それは、ちょっとしゃくなのですが、筆者が既に知っている物だったのです。しかし、この物を位相空間としてとらえたのは大田さんが初めてだったのではないのでしょうか。

定理 5 [E-0].  $S$  を  $\omega_1$  の stationary 部分集合で  $\omega_1 - S$  も stationary なものと取る。  $\omega_1 + 1$  の部分空間  $X_0 = S \cup \{\omega_1\}$  は  $N$ -コンパクトで、 $k_N X_0$  は  $N$ -コンパクトで

ない。よって  $C(X_0, \mathbb{Z})^*$  は反射的でない。

これで Reid の  $\mathbb{Z}$ -双対 についての問題は一応決着がついたわけですが、同じ頃 Eklof - Mekler - Shelah の共同研究で CH の仮定のもとで  $A^*$  が反射的でなく  $A^* \leq \mathbb{Z}^N$  となるものをつくっています。  $C(X_0, \mathbb{Z})^* \leq \mathbb{Z}^N$  は成立しません。

さて静大の清沢毅光さんが大田さんから話を聞いて同いような定理が Nonarchimedean functional analysis [Rooij] にあることを教えて下さいました。体  $K$  上のノンアルキメディアン付値について non spherically complete の場合なのですが見れば見る程結果が似ているのです。対象は  $C(X, \mathbb{Z})$  の代わりに  $BC(X, K) = \{f: f \in C(X, K), \exists M \forall x |f(x)| \leq M\}$  です。そして "free, direct product, direct sum ..." を "base をもつ, Banach product, Co-sum ..." でおきかえて読みますと色々な同じ事が成立します。そこでこれらは同じ定理ではないか、つまり適当な setting で証明すれば、アーベル群の場合と、ノンアルキメディアン・バナッハ空間の場合を系として導けるのではないかと思っているのですが、これは成功していません。Rooij の本をパラパラ読んでいて気がついたのですが  $\aleph_1$  の定理に対応するものはあるのですが Chase の Lemma に対応するものがないのです。制

限された形で "  $K$  が densely valued の場合  $l_\infty(I)$  から  $C_0(I)$  への linear bounded operator はコンパクトである " があります。  $K$  が densely valued でない場合はコンパクトでないものがあるので Chase の lemma は densely valued のとき成立する可能性があります。 Rooij の証明は前のいくつかの定理を使うので直接証明を試みると Chase's の lemma に対応するものもえられます。アーベル群のときと同じように可算完備フル代数上に構造をもつ  $K$ -バナッハ空間に対して成立します。つまり、

定理:  $K$  をノンアルキメディアン体で densely valued とする。  $(G, \rho)$  を可算完備フル代数  $B$  上の  $K$ -バナッハシーフ。  $\bigoplus_{j \in J} M_j$  を co-sum とする。 任意の有界線型作用素  $T: \widehat{G} \rightarrow \bigoplus_{j \in J} M_j$ , 任意の  $\varepsilon > 0$  について可算完備 ultrafilter  $F_1 \dots F_n$  と有限集合  $J_0 \subseteq J$  が存在し、  $\| \pi_{J-J_0} T|_{K_{F_1 \dots F_n}} \| < \varepsilon$  但し、

$\pi_{J-J_0}: \bigoplus_J M_j \rightarrow \bigoplus_{J-J_0} M_j$  標準射影、

$x \in K_{F_1 \dots F_n} \iff 1 \leq i \leq n \exists b \in F_i (\rho'_b(x) = 0)$ 。

なお、Kos の定理に対応する vander Put の定理は、アーベル群のときと同じように  $\widehat{G}$  について成立します。この上記の定理の直接の系として例えば "  $M$  を実数空間上のノルム有界  $K$ -値ボレル関数を測度  $\mu$  で割った



$K$ -バナッハ空間とあるとき  $M = \bigoplus_{n=1}^{\infty} M_n$  (右辺は Co-sum が成立するのはほとんどすべての  $n$  について  $M_n = 0$  のときだけとなる。) これは atomless 完備ブール代数で濃度が非可測なら可算完備 ultrafilter がないことからすぐ言えます。[E<sub>3</sub>] では Reid Class の階層定理に Chase の lemma を使っています。そこで  $K$ -Banach space についても Reid Class を定義して階層定理を証明することを考えました。階層定理の主要部分は Zimmerman の図式によるのですが、ノルムのない場合はいわば  $\| \dots \| = 0$  の形であるので、初めのうち中々うまくいかないのではないかと思っていたのですが、次の Lemma で切り抜けます。この lemma は 23 日よく知られたものでしょう。

Lemma:  $A$  が  $B \oplus C$  の complemented subspace と同型で、あり  $\| \pi_C i \|$  が十分小さいとき、 $A$  は  $B$

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{i} & B \oplus C \\ \parallel & & \\ A & \xleftarrow{\sigma} & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{の complemented subspace と同} \\ \text{型となる。} \end{array}$$

ところが「また」気になることがあるのです。添字集合が  $M_c$  以上でも Reid class の type が  $M_c$  未満のとき [E<sub>4</sub>] では階層定理がしているのですが、その場合現われる ultraproduct については上の lemma では切り

抜けられないです。そのためアーベル群のときの  $[E_4]$  に対応するところまでは今のところ いていないわけです。

最後に、何度も顔を出す可測基数について述べたいと思います。3.4年前までアーベル群論において大きな基数が現われるのは  $\aleph_1$  の定理についての可測基数と、Indecomposable 群の存在についての強到達不能数ぐらいでした。(後者は 1974 年の Shelah の論文の中で、全く基数の議論と無関係な証明を与えたので、結局前者だけということでした。) 最近、 $\aleph_1$ , normal ultrafilter, 弱コンパクト基数、強コンパクト基数、超コンパクト基数などが現われてきました。[D, D-G, G-S, W] [D] と [D-G] の中でラディカル  $R_{\aleph_1}$  が基数条件を満たすことが強コンパクト基数の存在から導かれ、可測基数の非存在から  $R_{\aleph_1}$  が基数条件を満たさないことが導かれていました。最近、阿部吉弘さんと話しているとき、この性質と J. L. Bell による  $\aleph_1, \aleph_2$ -コンパクト基数の存在が同値となることに気がつきました。集合論において大きな基数のことが色々な意味で小さい濃度  $\aleph_1, \aleph_2, \dots, \aleph_{\omega}, \aleph_{\omega+1}$  等と関係している事実を考えると、大きな基数での代数系、その他の性質を研究することは将来性のあることのように思います。そこでさしあたって可測基数の関係した問題をいくつかまと

めておきます。

- 1) 直積  $\mathbb{Z}^I$  の直和因子は必ずある  $\mathbb{Z}^J$  と同型か。  
( $\overline{I} < M_c$  では成立することが知られています。)
- 2)  $X = \beta_N X$  で  $C(X, \mathbb{Z})$  が反射的なら  $C(X, \mathbb{Z})$  は非可測濃度か。(これは大田さんの指摘した問題で、定理4で位相空間の性質としての同値条件があります。これは実コンパクトの場合、Häuserの問題に対応しています。)
- 3) 自由アーベル群で  $\text{rank } M_c$  のものは  $\mathbb{Z}$ -dual になりうるか？
- 4)  $\mathbb{R}$  の群の  $\mathbb{Z}$ -双対は  $\mathbb{R}$  に属するか。
- 5)  $X$  が 0-次元ハウストルフ空間で  $C(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^I$  なら  $X$  の離散部分空間  $D$  があって、 $D \leq X \leq \beta_N D$  となるか。(  $\overline{X} < M_c$  のときは  $X$  が離散であることが成立している。)

## References

- [D] M. Dugas, On reduced products of abelian groups, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 73 (1985) 41-47.
- [D-G] M. Dugas - R. Goebel, On radicals and products, Pacific Journal of Math. 118(1985) 79-104.
- [D-Z] M. Dugas - B. Zimmerman-Huisgen, Iterated direct sums and products of modules, LNM 874, 179-193, Berlin-New York, 1981.
- [数解研講究録]480, 代数の無限積と可測基数.
- [E<sub>1</sub>] On a Boolean power and direct product of abelian groups, Tsukuba J. Math. 6 (1982) 187-194.
- [E<sub>2</sub>] On a Boolean power of a torsion free abelian group, J. Algebra, 82(1983) 84-93.
- [E<sub>3</sub>] On Z-kernel groups, Archiv Math. 41 (1983) 289-293.
- [E<sub>4</sub>] Z-kernel groups of measurable cardinalities, Tsukuba J. Math. 8 (1984) 95-100.
- [E-O] K. Eda - H. Ohta, On abelian groups of integer-valued functions, their Z-duals and Z-reflexivity, a preprint.
- [G-S] R. Goebel - S. Shelah, Semi-rigid classes of cotorsion-free abelian groups, J. Algebra 93 (1985) 136-150.
- [R] G. A. Reid, Almost free abelian groups, Lecture Notes, 1966-67, Tulane University.
- [Rooij] A. C. M. van Rooij, Non-archimedean functional analysis, Pure and Applied Math. 51, Dekker, New York- Basel, 1978.
- [Z] B. Zimmerman-Huisgen, On Fuchs' problem 76, J. Reine Angew. Math. 309, (1979) 86-91.